5. (15p.) Ciąg $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ o wyrazach w $[0,1]$ nazwiemy *równomiernym*, gdy dla każdej funkcji ciągłej zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Wykazać, że ciąg $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ jest równomierny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k = \frac{1}{k+1}.$$

Rozwiązanie:

$\Rightarrow$ Jeśli ciąg jest równomierny, to dla każdej funkcji $\omega_k(x) = x^k$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

$\Leftarrow$ Z $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k = \frac{1}{k+1}$. wynika, że dla $k = 0,1,2,\ldots$ mamy i $p_k(x) = x^k$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_k(x_j) = \int_0^1 p_k(x)dx$$

Z liniowości całki, skończonej sumy i arytmetycznych własności granic dla dowolnego wielomianu ω zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \omega(x_j) = \int_0^1 \omega(x)dx.$$

Tw. Weierstrassa mówi, że dla dowolnej funkcji $f \in C([0,1])$ istnieje ciąg wielomianów ω_k zbieżny jednostajnie na $[0,1]$ do f.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej zbieżności $\omega_k \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$ istnieje k_ε t.że $\forall_{k > k_\varepsilon}$

$$\forall_{j\in\mathbb{N}} \quad |\omega_k(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon$$

Stąd dla $k > k_\varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\omega_k(x_j) - f(x_j)\right)\right| < \varepsilon,$$

zatem dla każdego $k > k_\varepsilon$

Posługujemy się tu granicami dolnymi i górnymi, bo nie wiemy czy granica istnieje.

$$-\varepsilon < \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\omega_k(x_j) - f(x_j)\right) \le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\omega_k(x_j) - f(x_j)\right) < \varepsilon$$

równoważnie (korzystamy z własności granic dolnych i górnych)

$$-\varepsilon < \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_k(x_j)}_{\text{ta granica istnieje z założenia}} - \underbrace{\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)}_{\text{nie wiemy czy istnieje granica}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_k(x_j) - \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) < \varepsilon$$

Z założenia (wciąż dla $k > k_\varepsilon$)

$$-\varepsilon < \int_0^1 \omega_k(x)dx - \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \leq \int_0^1 \omega_k(x)\,dx - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) < \varepsilon$$

Przechodząc w nierówności do granicy $(k\to\infty)$ [tu wiemy, że granica przy $k\to\infty$ istnieje]

$$-\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \omega_k(x)\,dx - \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \leq \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \omega_k(x)\,dx - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \leq \varepsilon$$

Z tw. o jednostajnym przejściu do granicy pod znakiem całki mamy

$$-\varepsilon \leq \int_0^1 f(x)\,dx - \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \leq \int_0^1 f(x)\,dx - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \leq \varepsilon$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ wnioskujemy

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)\,dx - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = 0$$

Skąd dostajemy istnienie granicy i równość.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Ponieważ dzieje się tak dla każdej funkcji ciągłej, to ciąg jest równomierny $\boxed{\Xi}$